КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н.ТУПОЛЕВА

М.А.Дараган, С.И.Дорофеева, Е.В. Стрежнева, В.В.Соловьев

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ЧАСТЬ2
(ПРАКТИКУМ)
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Казань 2004

Настоящий практикум (часть 1, часть2) охватывает учебный материал практических занятий второго семестра по разделу «Интегральное исчисление функций одной переменной». Часть 1 — «Неопределенный интеграл» и часть 2 — «Определенный интеграл». По каждой теме проводятся основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения задач, рассматриваются типовые задачи с подробными решениями.

В качестве образцов приводятся варианты контрольной работы по теме: «Определенный интеграл и его приложения», один из них – с подробными решениями задач.

Основное внимание уделено задачам, способствующим уяснению фундаментальных понятий и методов высшей математики.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Занятие седьмое

Тема: «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (РИМАНА) КАК ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА»

Основные теоретические сведения

7.1. **Интеграл Римана**

Пусть на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, задана функция $f(x)$, $\tau=\{x_k\}$, $k=0,1,...,k_\tau$ – некоторое разбиение этого отрезка (такими точками x_k, $k=0,1,...,k_\tau$, что $a=x_0<x_1<...<x_k<...<x_{k_\tau}=b$), $\delta_\tau=\max\limits_{i=1,2,...k_\tau}|x_i-x_{i-1}|$ – мелкость (шаг) этого разбиения, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Зафиксируем произвольным образом точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,...k_\tau$ и составим сумму $S_\tau=\sum\limits_{i=1}^{k_\tau}f(\xi_i)\Delta x_i$.

Суммы этого вида называются интегральными суммами (Римана) функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a,b]$, если существует (и, следовательно, конечный) предел $\lim\limits_{\delta_\tau\to0}S_\tau$. Этот предел называется определенным интегралом Римана функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Число a называется нижним, а b – верхним пределом интегрирования.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx\overset{def}{=}\lim_{\delta_\tau\to0}\sum_{i=1}^{k_\tau}f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (7.1)$$

Определение предела (7.1) можно сформулировать в терминах пределов последовательностей или на языке «$\varepsilon-\delta$».

Определение 7.1. Число J называется пределом интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{k_\tau}f(\xi_i)\Delta x_i$ при $\delta_\tau\to0$, если для любой последовательности

$\{\tau_n\}$, $n=1,2,...,\tau_n=\left\{x_k^{(n)}\right\}$, $k=0,1,...,k_{\tau_n}$ разбиений отрезка $[a,b]$, у которой $\lim\limits_{n\to\infty}|\tau_n|=0$, и для любого выбора точек $\xi_i^{(n)}\in\left[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}\right]$, $i=1,2,...k_{\tau_n}$; $n=1,2,...$ существует предел последовательности соответствующих интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{k_{\tau_n}} f(\xi_i)\Delta x_i$, $n=1,2,...$ и он равен *J*:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k_{\tau_n}} f(\xi_i)\Delta x_i = J\,.$$

Определение 7.2. Число J называется пределом интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{k_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i$ при $\delta_\tau\to 0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что, каково бы ни было разбиение $\tau=\{x_k\}$, $k=0,1,...,k_\tau$ (отрезка $[a,b]$) мелкости $\delta_\tau<\delta$, и каковы бы ни были точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{i=1}^{k_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right|<\varepsilon$.

Определения 7.1 и 7.2 равносильны.

Полагается

$$\int_a^a f(x)dx \overset{def}{=} 0,\ \int_b^a f(x)dx = -\int f(x)dx,\ a<b\,.$$

Теорема 7.1 (необходимое условие интегрируемости).

Для того чтобы функция была интегрируема на некотором отрезке, необходимо, чтобы она была ограничена на этом отрезке.

Отметим, что ограниченность функции не является достаточным условием интегрируемости. Так функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ рациональное,}\\ 0, \text{ если } x \text{ иррациональное.}\end{cases}$$

– ограничена, но на любом отрезке $[a,b]$ не интегрируема по Риману.

Действительно, как бы мы ни уменьшали максимальную длину частичных отрезков разбиения, мы всегда получим интегральные суммы, равные $(b-a)$, если за ξ_i выберем рациональные точки, и равные нулю, если за ξ_i выберем иррациональные точки.

Каждая из следующих теорем выражает достаточные условия интегрируемости функции (по Риману):

Теорема 7.2. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 7.3. Если функция монотонна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 7.4. Если на отрезке $[a,b]$ функция ограничена и имеет на нем определенное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке, причем значение интеграла не зависит от значений функции в точках разрыва.

Геометрически определенный интеграл (7.1) представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $f(x)$ отрезком $[a,b]$ оси *Ox* и отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, причем площади, расположенные выше оси *Ox*, входят в эту сумму со знаком «плюс», а площади, расположенные ниже оси *Ox*, входят со знаком «минус» (рис. 1).

7.2. Основные свойства определенного интеграла:

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ также интегрируемы, причем
$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$$
2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функции $C\cdot f(x)$ ($C-const$) также интегрируема на этом отрезке, причем
$$\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx.$$
3. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то эта функция интегрируема на любом отрезке $[c,d]$, содержащемся в отрезке $[a,b]$.
4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,c]$ и $[c,b]$, то эта функция интегрируема и на отрезке $[a,b]$, причем
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$
независимо от того, лежит ли точка *c* внутри отрезка $[a,b]$ или вне его.
5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и неотрицательна на этом отрезке, то $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.
6. Если функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю на $[a,b]$, то
$$\int_a^b f(x)dx>0.$$
7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x)\ge g(x)$, то
$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx.$$
8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке, причем
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx.$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, а m и M соответственно точная нижняя и точная верхняя грани $f(x)$ на $[a,b]$, то
$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$
10. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то выполняется неравенство Коши-Буняковского
$$\int_a^b f(x)g(x)dx\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$
11. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi\in(a,b)$, что справедливо равенство
$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$
(теорема о среднем значении).

Число $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

12. Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $g(x)\ge 0$, то существует такая точка $\xi\in(a,b)$, что справедливо равенство
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$
(обобщенная теорема о среднем).

13. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для функции $f(x)$, то есть $\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x),\ x\in[a,b]$.

14. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы в точке $x\in(a,b)$ и $f(t)$ непрерывна при $\varphi(a)\le t\le\psi(b)$, то
$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt=f\left[\psi(x)\right]\cdot\psi'(x)-f\left[\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x).$$

Примеры решения задач

Пример 7.1.

Для $\int_0^\pi \sin x dx$ найти верхние и нижние интегральные суммы, соответствующие разбиению отрезка $[0,\pi]$ на три и шесть равных частей.

Решение.

Разобьем $[0,\pi]$ на три равные части точками $x_0=0,\ x_1=\frac{\pi}{3},\ x_2=\frac{2\pi}{3},\ x_3=\pi$.

На $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ функция $y=\sin x$ монотонно возрастает, поэтому для этого отрезка имеем $m_0=\sin 0=0,\ M_0=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

На $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ наименьшим значением функции является $M_1=\sin\frac{\pi}{2}=1$. На отрезке $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$ функция $y=\sin x$ монотонно убывает, поэтому $m_2=\sin\pi=0$, $M_2=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как все Δx_k равны $\frac{\pi}{3}$, то

$$s_3=\sum_{k=0}^{2}m_k\Delta_k=\frac{\pi}{3}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}+)\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}=0,907;$$

$$s_3=\sum_{k=0}^{2}M_k\Delta x_k=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi\left(\sqrt{3}+1\right)}{3}=2,86.$$

При разбиении на шесть равных частей отрезка $[0,\pi]$ точками $x_0=0,\ x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{\pi}{3},\ x_3=\frac{\pi}{2},\ x_4=\frac{2\pi}{3},\ x_5=\frac{5\pi}{6},\ x_6=\pi$ таким же путем находим

$$m_0=0; \qquad M_0=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$$

$$m_1=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}; \qquad M_1=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$m_2=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad M_2=\sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=1;$$

$$m_3=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad M_3=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;$$

$$m_4=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}; \qquad M_4=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$m_5=\sin(\pi)=0; \qquad M_5=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

Для этого разбиения получаем

$$s_6=\frac{\pi}{6}\left(m_0+m_1+\ldots+m_5\right)=\frac{\pi}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)=1,43;$$

$$s_6=\frac{\pi}{6}\left(M_0+M_1+\ldots+M_5\right)=\frac{\pi}{6}\left(3+\sqrt{3}\right)=2,48.$$

Как и должно быть выполняется неравенство

$$s_3 \le s_6 \le \int_0^{\pi} \sin x dx \le S_6 \le S_3$$

(точное значение интеграла равно 2).

Пример 7.2.

Вычислить $\int_0^1 x^2 dx$ как предел интегральной суммы.

Решение.

Здесь $f(x) = x^2,\ a = 0,\ b = 1.$

Разделим $[0,1]$ на n равных частей, тогда $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$.

Выберем $\xi_k = x_k$. Имеем

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ x_n = \frac{n}{n} = 1;$$

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ f(\xi_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \ldots,\ f(\xi_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2;$$

$$f(\xi_k)\Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}.$$

Здесь использована формула квадратов натуральных чисел.

Занятие восьмое

Тема: «ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ: НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА, ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ, ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ»

Основные теоретические сведения

8.1. Формула Ньютона–Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для любой ее первообразной $F(x)$ справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (8.10$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница, а также основной формулой интегрального исчисления.

8.2. Формула замены переменной

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и множество значений функции $\varphi(t)$ содержится в отрезке $[a,b]$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (8.2)$$

Эта формула называется формулой замены переменной в определенном интеграле или формулой интегрирования подстановкой. Ее можно использовать как слева направо, так и справа налево.

Формула (8.2) остается справедливой и в случае, если вместо функций $f(x)$, $\varphi'(t)$ потребовать лишь их интегрируемость.

8.3. Формула интегрирования по частям

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \qquad (8.3)$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Она остается справедливой и в случае, если вместо непрерывности производных u' и v' потребовать лишь их интегрируемость.

Примеры решения задач

Пример 8.1.

Вычислить $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$.

Решение.

По формуле (8.1) имеем

$$\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx=\int_0^1 (e^x-1)^4 d(e^x-1)=\frac{(e^x-1)^5}{5}\Bigg|_0^1=\frac{(e-1)^5}{5}.$$

Пример 8.2.

Вычислить $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение.

Применим подстановку $x=a\sin t$; роль α и β играют значения 0 и $\pi/2$. Зная, что функция $x=\sin t$ и ее производная непрерывны на $[0,\pi/2]$, получаем

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 8.3.

Покажем, что формальное применение формулы замены переменной может привести к неверному результату:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

Если сделать замену переменной $x=\frac{1}{t}$, то

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{\pi}{2},$$

что дает неверный результат. Ошибка связана с тем, что $x=\frac{1}{t}$ разрывна на $[-1,1]$.

<u>*Пример 8.4.*</u>

Вычислить $\int_{0}^{\pi/2}x\sin xdx$.

<u>*Решение.*</u>

Обозначим $u=x,\ \sin xdx=dv$, тогда $du=dx,\ v=-\cos x$. По формуле (8.3) получаем

$$\int_{0}^{\pi/2}x\sin xdx=-x\cos x\Big|_{0}^{\pi/2}+\int_{0}^{\pi/2}\cos xdx=\sin x\Big|_{0}^{\pi/2}=1.$$

<u>*Пример 8.5.*</u>

Вычислить $I=\int_{1/e}^{e}|\ln x|dx$.

<u>*Решение.*</u>

Разобьем интеграл на сумму интегралов по отрезкам $[1/e,1]$ и $[1,e]$, чтобы освободиться от модуля, и применим формулу (8.3) интегрирования по частям. Имеем

$$I=-\int_{1/e}^{e}\ln xdx+\int_{1}^{e}\ln xdx=-x\ln x\Big|_{1/e}^{1}+\int_{1/e}^{1}dx+x\ln x\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}dx=$$

$$=-\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)+e-(e-1)=2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Существенное упрощение вычислений возможно при нахождении интегралов от четных и нечетных функций с симметричными пределами и периодических функций

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$, если $f(x)$ – функция четная;

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$, если $f(x)$ – функция нечетная;

$\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a+nT}^{b+nt}f(x)dx,\ \ n=0,\pm1,\pm2,..,\ \ f(x)=f(x+T).$

<u>*Пример 8.6.*</u>

Вычислить $\int\limits_{-5}^{5} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 6} dx$.

Решение.

Функция $f(x)$ – нечетная, пределы симметричны, следовательно, интеграл равен нулю.

Пример 8.7.

Вычислить $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Решение.

Первообразная интегрируемой функции не выражается в элементарных функциях. Однако определенный интеграл можно найти

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx .$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $x = \pi - t,\ dx = -dt$

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} - \pi \int\limits_{\pi/2}^{0} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt + \int\limits_{\pi/2}^{0} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} - \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} + \pi \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt .$$

Так как определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, то два первых слагаемых взаимно уничтожаются

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi\left(-arctg\left(\cos t\right)\right)\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} .$$

Занятие девятое

Тема: «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР И ДЛИН ДУГ КРИВЫХ»

Основные теоретические сведения

9.1. Вычисление площадей

Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. Площадь S фигуры (S) (рис.9.1), ограниченной графиком функции $y = y(x)$, отрезком $[a,b]$ оси Ox и соответствующими отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

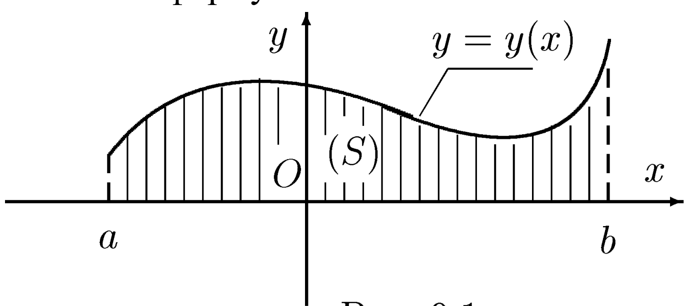

Рис. 9.1

$$S = \int\limits_{a}^{b} y(x) dx . \tag{9.1}$$

Если $y(x) \le 0$, то

$$S = -\int_a^b y(x)dx. \qquad (9.2)$$

Фигуру (S) называют криволинейной трапецией.

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где функция $x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную на $[\alpha, \beta]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а функция $y(t)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$, то площадь S фигуры (S) вычисляется по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt. \qquad (9.3)$$

Пусть функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и $y_2(x) \ge y_1(x)$, $x \in [a,b]$.

Площадь S фигуры (S) (рис.9.2), ограниченной графиками функций, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и соответствующими отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

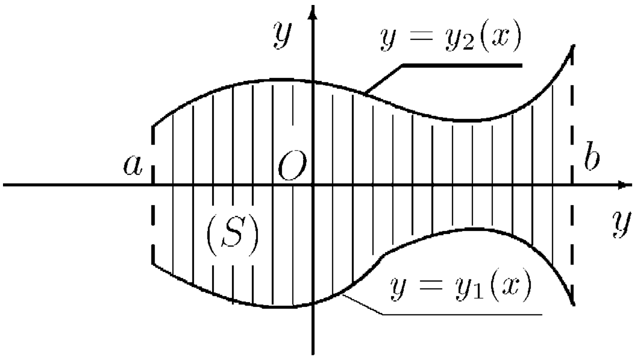

Рис. 9.2

$$S = \int_a^b \left[y_2(x) - y_1(x)\right]dx. \qquad (9.4)$$

При аналогичных предположениях относительно данных функций для площади S фигуры (S) (рис. 9.2) имеют место формулы

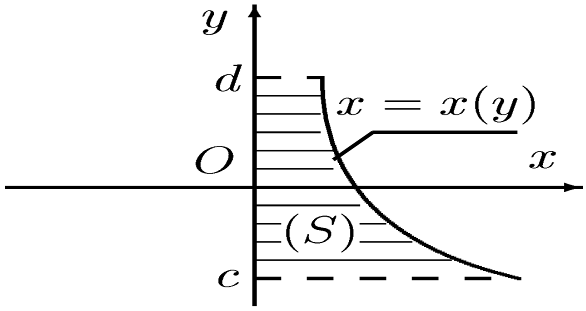

Рис. 9.3

$$S = \int_c^d x(y)dy, \qquad (9.5)$$

$$S = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt, \qquad (9.6)$$

а для площади S фигуры (S) (рис. 9.4)

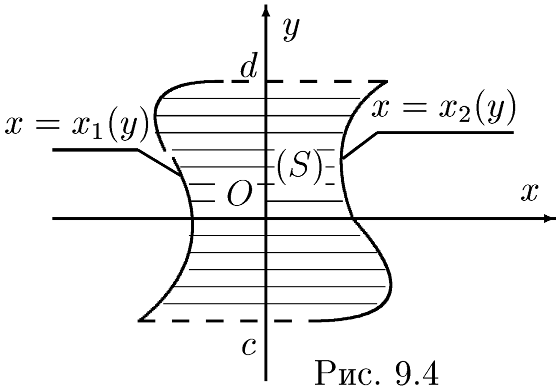

Рис. 9.4

$$S = \int_c^d \left[x_2(y) - x_1(y)\right] dy. \qquad (9.7)$$

Пусть функция $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где $0 < \beta - a \le 2\pi$, непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$.

Площадь S криволинейного сектора (S) (рис.9.5), ограниченного графиком функции $r(\varphi)$ в полярных координатах и соответствующими отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле

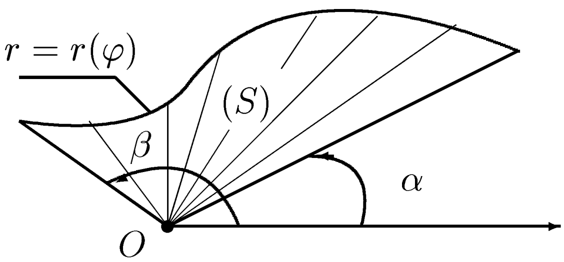

Рис. 9.5

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi. \qquad (9.8)$$

9.2. Вычисление длин дуг кривых

Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$ функции, вычисляется по формуле

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \qquad (9.9)$$

Длина дуги плоской кривой, заданной параметрически, вычисляется по формуле

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \qquad (9.10)$$

Если плоская кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, где $y(x)$– непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ функция, то ее длина вычисляется по формуле

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + y'^2(t)} dx. \qquad (9.11)$$

Если плоская кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где $r(\varphi)$– непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ функция, то ее длина вычисляется по формуле

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (9.12)$$

Отметим, что задание плоской кривой параметрически уравнениями $x=x(s)$, $y=y(s)$, где s – длина дуги этой кривой от некоторой ее точки M_0 до точки $M(x,y)$, называют натуральной параметризацией кривой. При этом, задав на кривой направление, считают длины дуг до точек в этом направлении положительными, а до точек в противоположном направлении – отрицательными.

Примеры решения задач

Пример 9.1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=x^2$, $x=1$, $x=2$ (рис. 9.6)

Решение.

По формуле (0.4) имеем

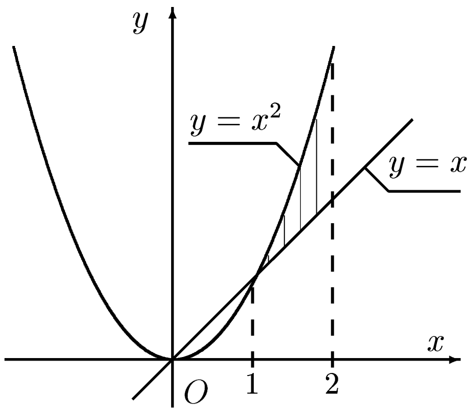

Рис. 9.6

$$S=\int_1^2 x^2dx-\int_1^2 xdx=\int_1^2\left(x^2-x\right)dx=.$$
$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{6}.$$

Пример 9.2.

Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и кривой $y=\cos x$, $0\le x\le\frac{3\pi}{2}$ (рис. 9.7)

Решение.

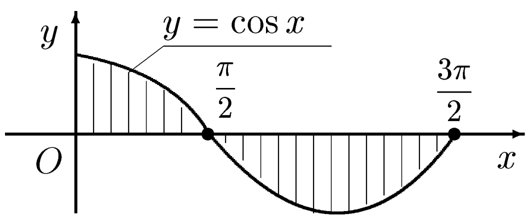

Рис. 9.7

Так как функция $y=\cos x$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ неотрицательна, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ неположительна, то, применяя формулы (9.1) и (9.2), получаем

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos xdx=\sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=3.$$

Пример 9.3.

Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ (рис. 9.8)

Решение.

Применяя формулу (9.3), получаем

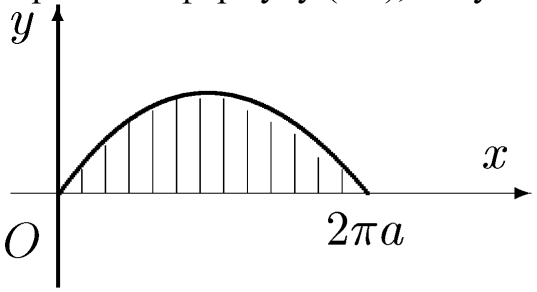

Рис. 9.8

$$S=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\left(t-2\sin t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

Пример 9.4.

Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $1+\cos\varphi$ (рис. 9.9).

Решение.

Применяя формулу (9.8), получим

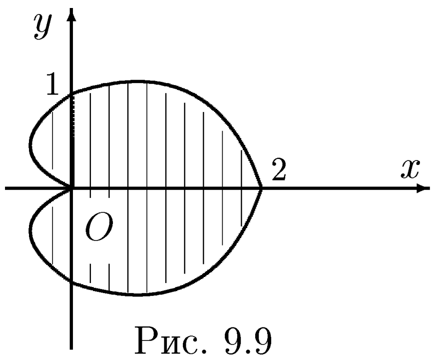

Рис. 9.9

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi+2\sin\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}.$$

Пример 9.5.

Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от ее вершины до точки $M(1,1)$.

Решение.

По формуле (9.11) имеем

$$s=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

Пример 9.6.

Найти длину дуги винтовой линии $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t,\ 0\le t\le\pi$.

Решение.

По формуле (9.9) имеем $s=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+4}\,dt=\sqrt{5}\pi$.

Пример 9.7.

Найти длину дуги кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$.

Решение.

По формуле (9.12) имеем

$$s=2a\int_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a.$$

Занятие десятое

Тема: «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА (ПРОДОЛЖЕНИЕ). ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ И ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ»

Основные теоретические сведения

10.1. Вычисление объемов тел

Пусть тело расположено в пространстве *Oxyz* между плоскостями $x = a$ и $x = b$, причем каждое сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, имеет площадь $S(x)$, где $S(x)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция.

Объем *V* этого тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (10.10$$

Аналогичные формулы имеют место, если вместо оси *Ox* взять ось *Oy* или *Oz*.

Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и отрицательна на отрезке $[a,b]$.

Объем *V* тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры (S) (рис. 10.1), ограниченной графиком функции $y(x)$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и отрезком оси *Ox*, вычисляется по формуле

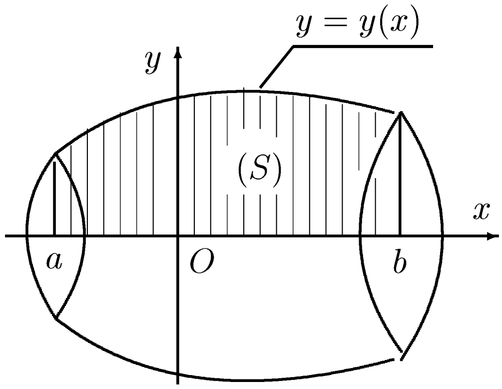

Рис. 10.1

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)dx. \qquad (10.2)$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$, где функция $x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную на $[\alpha, \beta]$ и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а функция $y(t)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$, то объем *V* тела, образованного вращением фигуры (S) (рис. 10.1) вокруг оси *Ox*, вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_\alpha^\beta y^2(t)x'dt. \qquad (10.3)$$

Если функция $x(t)$ убывает и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то при тех же прочих условиях

$$V = -\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt. \qquad (10.4)$$

Пусть функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $y_2(x) \ge y_1(x) \ge 0,\ x \in [a,b]$.

Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры (S) (рис. 10.2), ограниченной графиками функций $y_1(x),\ y_2(x)$ и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

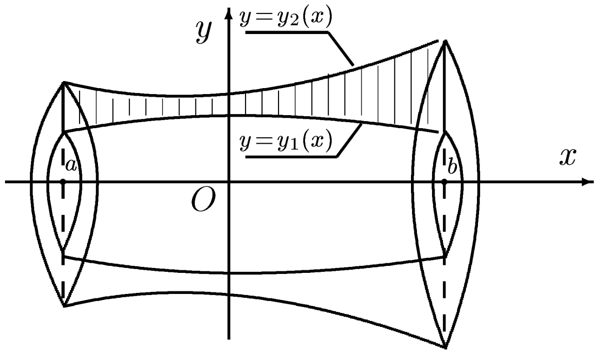

Рис. 10.2

$$V = \pi \int_a^b \left[y_2^2(x) - y_1^2(x) \right] dx. \qquad (10.5)$$

Для тел, образованных вращением фигуры (S) (рис. 10.3, 10.4) вокруг оси Oy, при аналогичных предположениях относительно данных функций, справедливы, соответственно, следующие формулы для объемов:

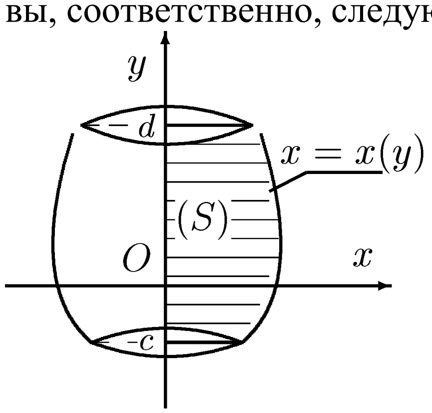

Рис. 10.3

$$V = \pi \int_c^d x^2(t)\, x' dy, \qquad (10.6)$$

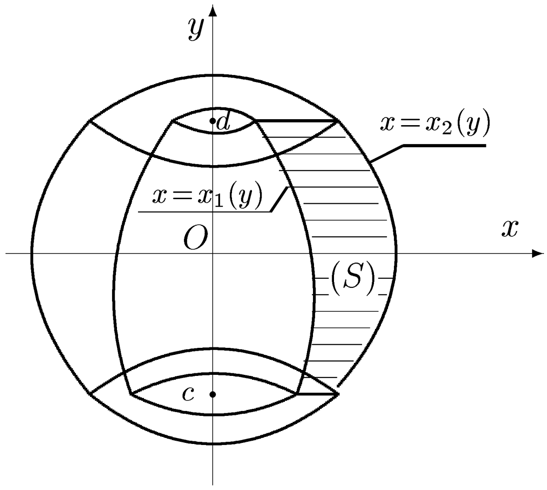

Рис. 10.4

$$V = \pi \int_\alpha^\beta x^2(t)\, y'(t)\, dt, \qquad (10.7)$$

$$V = \pi \int_c^d \left[x_2^2(y) - x_1^2(y) \right] dy. \qquad (10.8)$$

10.2. Вычисление площадей поверхностей

Пусть $y = y(x)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция.

Площадь S поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \qquad (10.9)$$

Пусть в полуплоскости $y \ge 0$ параметрически задана кривая уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha,\beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha,\beta]$ функции.

Площадь S поверхности, образованной при вращении данной кривой вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \qquad (10.10)$$

Если кривая расположена в полуплоскости $y \le 0$, то

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \qquad (10.11)$$

При аналогичных условиях площадь S поверхности, образованной при вращении кривой вокруг оси Oy, соответственно равна

$$S = 2\pi\int_c^d |x(y)|\sqrt{1+xy^2(y)}dy, \qquad (10.12)$$

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \quad (x(t)\ge 0), \qquad (10.13)$$

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \quad ((t)\le 0). \qquad (10.14)$$

Примеры решения задач

Пример 10.1.

Найти объем шара радиуса R.

Решение.

Плоским сечением шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, перпендикулярным к оси Ox, является круг радиуса $\sqrt{R^2-x^2}$. Площадь $S(x)$ поперечного сечения в точке x равна

$$S(x) = \pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2.$$

По формуле (10.1) имеем

$$V = \int_{-R}^{R} S(x)dx = \pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx = \pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример 10.2.

Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением кривых $y = x^3,\ y = x,\ 0 \le x \le 1$, вокруг оси Ox (рис. 10.5)

Решение.

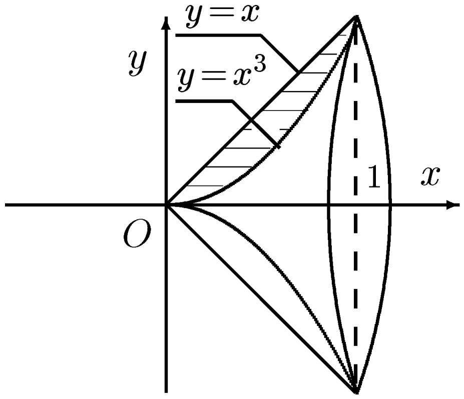

Рис. 10.5

Пользуясь формулой (10.5), получим

$$V=\pi\int_0^1\left(x^2-x^6\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\pi}{21}.$$

Пример 10.3.

Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной от вращения вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x=a\left(t-\sin t\right)$, $y=a\left(1-\cos t\right)$, $0\le t\le 2\pi$ (рис. 10.6).

Решение.

Применяя формулу (10.3), получим

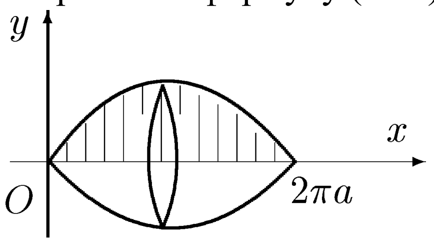

Рис. 10.6

$$V=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^3dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\frac{1+\cos 2t}{2}-\cos t\left(1-\sin^2 t\right)\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left(t-3\sin t+\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t-\sin t+\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=5\pi^2a^3.$$

Пример 10.4.

Найти площадь поверхности шарового пояса.

Решение.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Вращая вокруг оси Ox дугу $y=\sqrt{R^2-x^2}$ $\left(a\le x\le b\right)$ этой окружности, получим поверхность шарового пояса. По формуле (10.9) имеем

$$S=2\pi\int_a^b\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=2\pi R\left(b-a\right).$$

Пример 10.5.

Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение.

Пользуясь формулой (10.10), получаем

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)\sqrt{\left(1-\cos^2 t\right)}dt=2\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)\sqrt{2\left(1-\cos t\right)}dt=$$

$$=8\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=8\pi\left(-2\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{64\pi}{3}.$$

Занятие одиннадцатое

Тема «ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ»

Основные теоретические сведения

11.1. Вычисление массы материальной плоской кривой

Пусть простая кривая (L) задана параметрически уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ и пусть $\rho(x,y)$ – линейная плоскость массы в точке $(x,y)\in(L)$. Тогда масса кривой (L) вычисляется по формуле

$$M=\int_\alpha^\beta\rho\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \qquad (11.1)$$

Если кривая задана уравнением в декартовых прямоугольных координатах: $y=y(x),\ x\in[a,b]$, то

$$M=\int_a^b\rho\big(x,y(x)\big)\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \qquad (11.2)$$

В частности, при $\rho\equiv1$ числовое значение массы совпадает с длиной кривой.

11.2. Вычисление статистических моментов, координат центра масс и моментов инерции материальной плоской кривой

Статистические моменты M_x и M_y кривой (L) ($x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ – уравнение кривой) относительно координатных осей соответственно *Ox* и *Oy* в случае постоянной линейной плотности $\rho\equiv1$ вычисляются по формулам

$$M_x=\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \qquad (11.3)$$

$$M_y=\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \qquad (11.4)$$

Если кривая задана в декартовых прямоугольных координатах: $y=y(x),\ x\in[\alpha,\beta]$, то

$$M_x=\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx, \qquad (11.5)$$

$$M_y=\int_a^b x\sqrt{1+y'^2(x)}dx, \qquad (11.6)$$

Координаты x_c и y_c центра масс *C* кривой (L) вычисляются по формулам

$$x_c=\frac{M_y}{s},\quad y_c=\frac{M_x}{s}, \qquad (11.7)$$

где s – длина кривой (L).

Моменты инерции J_x и J_y кривой (L) (при $\rho \equiv 1$) относительно координатных осей соответственно *Ox* и *Oy* вычисляются по формулам

$$J_x = \int_\alpha^\beta y^2(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt, \qquad (11.8)$$

$$J_y = \int_\alpha^\beta x^2(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt, \qquad (11.9)$$

или (в декартовых прямоугольных координатах)

$$J_x = \int_a^b y^2(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}dx, \qquad (11.10)$$

$$J_y = \int_a^b x^2\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \qquad (11.11)$$

11.3. Вычисление статистических моментов, координат центра масс и моментов инерции материальной плоской фигуры

Статистические моменты M_x и M_y плоской фигуры (S), ограниченной непрерывными кривыми $y = y_1(x),\ y = y_2(x),\ x \in [a,b],\ \ y_1(x) \le y_2(x)$ и отрезками прямых $x = a,\ x = b$, в случае постоянной поверхностной плотности $\rho \equiv 1$ формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left[y_2^2(x) - y_1^2(x)\right]dx, \qquad (11.12)$$

$$M_y = \int_a^b x\left[y_2(x) - y_1(x)\right]dx. \qquad (11.13)$$

Координаты x_c и y_c центра масс C фигуры (S) вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{S}, \qquad (11.14)$$

где S – площадь фигуры (S).

Моменты инерции фигуры (S) относительно координатных осей (при $\rho \equiv 1$) вычисляются по формулам

$$J_x = \frac{1}{3}\int_a^b \left[y_2^3(x) - y_1^3(x)\right]dx, \qquad (11.15)$$

$$J_y = \int_a^b x^2\left[y_2(x) - y_1(x)\right]dx. \qquad (11.16)$$

11.4. Вычисление работы переменной силы

Пусть материальная точка движется по гладкой кривой, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s – переменная длина дуги, $s_0 \le s \le s_1$, под действием силы $\vec{F}(s)$, направленной по касательной к траектории в направлении движения. Работа A силы $\vec{F}(s) = F(s)\cdot\vec{\tau}$ ($\vec{\tau}$ – орт касательной к траектории в направлении движения) на участке пути от s_0 до s_1 вычисляется по формуле

$$A=\int_{s_0}^{s_1} F(s)ds. \qquad (11.17)$$

В частности, если материальная точка движется по оси *Ox* под действием силы $\vec{F}(x)=F(x)\vec{i}$ ($\vec{i}$ – орт оси *Ox*), то работа этой силы на отрезке $[a,b]$ вычисляется по формуле

$$A=\int_a^b F(x)dx. \qquad (11.18)$$

Если положение точки на траектории ее движения описывается с помощью какого-либо параметра *t* (например, времени) и если величина пройденного пути $s=s(t)$, $t_0 \le t \le_1$ является непрерывно дифференцируемой функцией, то работа вычисляется по формуле

$$A=\int_{t_0}^{t_1} F[s(t)]s'(t)dt. \qquad (11.19)$$

Примеры решения задач

Пример 11.1. Вычислить массу материальной кривой, заданную уравнением $y=\ln\cos x,\ \ 0\le x\le \pi/6$, если линейная плотность $\rho(x,y)=\cos^2 x$.

Решение.

Воспользуемся формулой (11.2). Имеем

$$M=\int_0^{\pi/6}\cos^2 x\sqrt{1+(-tgx)^2}dx=\int_0^{\pi/6}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\pi/6}=\frac{1}{2}.$$

Пример 11.2. Найти координаты центра масс дуги окружности $x=R\cos t,\ y=R\sin t$, расположенной в первой и второй четверти, если плотность $\rho\equiv 1$.

Решение.

Имеем: $S=\pi R,\ 0\le t\le\pi,\ x_t'=-R\sin t,\ y_t'=R\cos t$. По формулам (11.3), (11.4), (11.7) получаем

$$M_y=\int_0^{\pi}R\cos t\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}dt=R^2\int_0^{\pi}\cos tdt=R^2\sin t\Big|_0^{\pi}=0.$$

$$M_x=\int_0^{\pi}R\sin t\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}dt=-R^2\cos t\Big|_0^{\pi}=2R^2.$$

$$x_c=\frac{M_y}{S}=0,\quad y_c=\frac{2R^2}{\pi R}=\frac{2R}{\pi}.$$

Пример 11.3. Найти моменты инерции относительно осей *Ox* и *Oy* дуги линии, заданной в примере 11.2.

Решение.

Применяя формулы (11.8) и (11.9), получаем

$$J_x=\int_0^{\pi}R^2\sin^2 tdt=R^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=R^2\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi R^2}{2}.$$

$$J_y=\int_0^{\pi} R^2\cos^2 tdt = R^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = R^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi R^2}{2}.$$

<u>*Пример 11.4*</u>. Вычислить координаты центра масс материальной плоской фигуры, ограниченной $y_1=0,\ y_2=\sqrt{R^2-x^2},\ \rho\equiv 1$.

<u>*Решение.*</u>

Имеем $S=\dfrac{\pi R^2}{2}$, по формулам (11.12) – (11.14) получаем:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{2R^3}{3}.$$

$$M_y=\int_{-R}^{R}x\sqrt{R^2-x^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{\left(R^2-x^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{-R}^{R}=0.$$

$$x_c=0, t_c=\frac{2R^3}{3\dfrac{\pi R^2}{2}}=\frac{4R}{3\pi}.$$

<u>*Пример 11.5.*</u> Вычислить моменты инерции фигуры (пример 11.4) относительно координатных осей, $\rho\equiv 1$.

<u>*Решение.*</u>

Воспользуемся формулами (11.15), (11.16). Имеем

$$J_x=\frac{1}{3}\int_{-R}^{R}\sqrt{\left(R^2-x^2\right)^3}dx=\{\text{сделаем замену переменной } x=R\sin t\}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R^4\cos^4 tdt=\frac{R^4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{R^4}{12}\left(t+\sin 2t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi R^4}{8}.$$

$$J_y=\int_{-R}^{R}x^2\sqrt{R^2-x^2}dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R^2\sin^2 tR^2\cos^2 tdt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R^2\cos^2 tdt=\frac{R^4}{8}\left(t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi R^4}{8}.$$

<u>*Пример 11.6.*</u> Вычислить работу упругой силы пружины при растяжении пружины с закрепленным одним концом на величину *s*.

<u>*Решение.*</u>

Величина упругой силы пружины пропорциональна растяжению $p=C_s$, где $C-const$ (жесткость пружины). По формуле (11.17) имеем

$$A=\int_0^s Csds=C\frac{s^2}{2}\Bigg|_0^s=\frac{Cs^2}{2}.$$

Занятие двенадцатое

Контрольная работа по теме: «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»

Образец задания на выполнение контрольной работы (с решением).

1. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx$.
2. Вычислить $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$.
3. Вычислить $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=0,\ x=2,\ x=2^x,\ y=2x-x^2$.
5. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболами $y=x^2,\ 8x=y^2$.
6. Найти центр тяжести дуги первой арки циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$.

<u>Решение</u>

1. Воспользуемся формулой $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Имеем

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx = -2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^6 x d(\cos x) = -\frac{2}{7}\cos^7 x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{7}.$$

2. Применим формулу интегрирования по частям (8.3). Имеем

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = 1-\frac{2}{e}.$$

3. Введем новую переменную $t=\sqrt{x}$, тогда $t^2=x,\ dx=2tdt$. Вычисляем

$$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \frac{2}{3}\frac{2t^2}{t-1}dt = 2\int\limits_2^3\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)\Bigg|_2^3 = 7+2\ln 2.$$

4. Рассматриваема фигура изображена на рис 12.1. По формуле (9.4) имеем

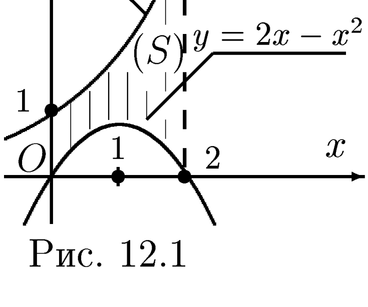

Рис. 12.1

$$S=\int\limits_0^2\left(2^x-\left(2x-x^2\right)\right)dx =$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^2 - \left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.$$

5. Тело, объем которого вычисляется, изображено на рис. 12.2. По формуле (10.8) имеем:

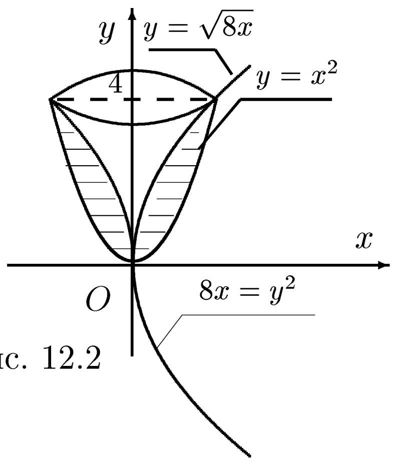

Рис. 12.2

$$V=\pi\int_0^4\left(y-\frac{y^4}{64}\right)dy=\frac{24}{5}\pi$$

6. Найдем длину s одной арки циклоиды (рис. 12.3). По формуле (9.10) имеем

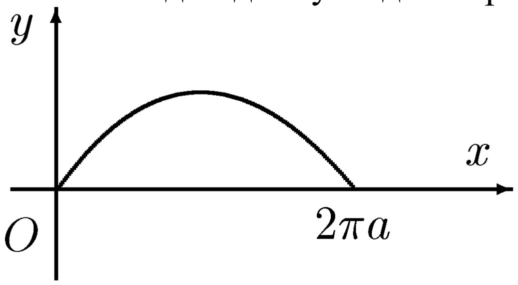

Рис. 12.3

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left(1-\cos t\right)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a.$$

Первая арка циклоиды расположена симметрично относительно прямой $x=\pi a$, поэтому центр тяжести дуги циклоиды лежит на прямой $x_c=\pi a$.

Вычисляем статистический момент арки циклоиды M_x по формуле (11.3) и координату y_c ее центра масс C по формуле (11.7):

$$M_x=\int_0^{2\pi}y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}a\left(1-\cos t\right)2a\sin\frac{t}{2}dt=2a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=\frac{32a^2}{3},$$

$$y_c=\frac{M_x}{S}=\frac{4a}{3}.$$

<u>**Образцы вариантов контрольных работ**</u>

<u>Вариант 1</u>

1. Вычислить $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x}$.

2. Вычислить $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$.

3. Вычислить $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = a\sin t$, $y = b\sin 2t$.
5. Вычислить объем тела, который образуется при вращении одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси *Ox*.
6. Найти момент инерции трапеции *ABCD* относительно ее основания *AD*, если $AD = a,\ DB = b$, а высота трапеции равна *h*.

Вариант 2.

1. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/4} ctg^4\varphi d\varphi$.
2. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x dx$.
3. Вычислить $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 2a\cos 3\varphi$.
5. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\cos x$, заключенной между точками с абсциссами $x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$.
6. Вычислить статистический момент фигуры, ограниченной линиями $y = x^2;\ y = \sqrt{x}$, относительно оси *Ox*.

Занятие тринадцатое

Тема: «НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (1-го РОДА)»

Основные теоретические сведения

Несобственными называют интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1-го рода) и интегралы от неограниченных функций (2-го рода).

13.1. Определение несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \geq a$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, B]$. Несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется следующим образом

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B} f(x)dx. \qquad (13.1)$$

Если этот предел существует (и, следовательно, конечен), то несобственный интеграл называется сходящимся, а функция $f(x)$– интегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$; если же предел не существует (в частности, когда он бесконечен), – расходящимся, а функция $f(x)$ неинтегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$.

Геометрически для непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a, +\infty)$ сходящийся несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ равен площади неограниченной криволинейной трапеции (S) (рис. 13.1):

$$(S) = \{(x, y) : a < x < +\infty, 0 < y < f(x)\}$$

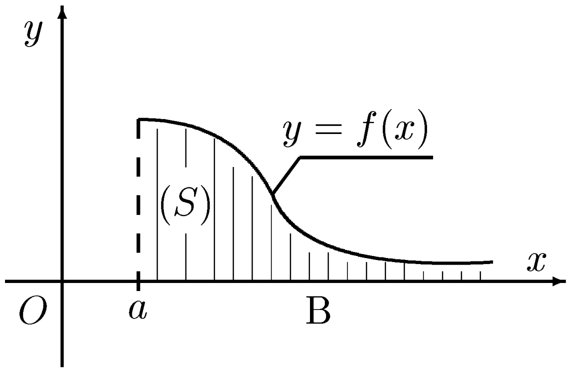

Рис. 13.1

Аналогично определяется несобственный интеграл функции $f(x)$, $x \in (-\infty, b]$ с нижним бесконечным пределом интегрирования

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{A \to -\infty} \int_{-\infty}^{b} f(x)dx. \qquad (13.2)$$

Несобственный интеграл с бесконечным верхним и бесконечным нижним пределами интегрирования функции $f(x)$, $x \in R$ определяется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (13.3)$$

где c – некоторое число.

Свойства несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования в основном аналогичны свойствам определенного интеграла (см. 7.2), за исключением свойств 9 и 11, которые для несобственных интегралов теряют смысл.

13.2. Основные приемы вычисления несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования:

1. С помощью формулы Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$, $x \in [a, +\infty)$, непрерывна и $F(x)$, $x \in [a, +\infty)$– какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \qquad (13.4)$$

где $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Если $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ не существует, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

2. С помощью формулы замены переменной

Если $f(x)$, $x\in[a,+\infty)$ – непрерывная, а $\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta)$, – непрерывно дифференцируемая, причем $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)<\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (13.5)$$

Формула (13.5) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из двух входящих в нее интегралов.

3. С помощью формулы интегрирования по частям

Если $u(x)$, $x\in[a,+\infty)$ и $v(x)$, $x\in[a,+\infty)$, – непрерывно дифференцируемые функции и $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)\cdot v(x)$ существует, то

$$\int\limits_a^{+\infty} udv=u\cdot v\Big|_a^{+\infty}-\int\limits_a^{+\infty} vdu, \qquad (13.6)$$

где

$$u\cdot v\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(u\cdot v)-u(a)\cdot v(a).$$

Формула (13.6) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из двух входящих в нее интегралов.

13.3. Критерий сходимости Коши

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon>0\ \exists B(\varepsilon)\ge a$ такое, что при $\forall B_1>B(\varepsilon)$ и $B_2>B(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

13.4. Признаки сходимости и расходимости интегралов с бесконечными пределами интегрирования от неотрицательных функций (признаки сравнения)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и интегрируемы на любом отрезке $[a,B]$, $B<+\infty$. Тогда:

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на промежутке $[a,+\infty)$ неравенству $f(x)\le g(t)$, то
   - Из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

- Из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

2. Если $g(x) > 0$ на промежутке $[a, +\infty)$ и существует

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,\ k \neq 0,$$

то интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

13.5. Абсолютно сходящиеся и неабсолютно (условно) сходящиеся интегралы

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

При исследовании сходимости несобственных интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ обычно применяют признаки сравнения (см. 13.4).

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется неабсолютно (условно) сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Результаты, аналогичные сформулированным в [13.2–13.5], справедливы и для интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

13.6. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле главного значения

Интегралом в смысле главного значения от функции $f(x)$, $x \in R$, называется $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{+A} f(x)dx$.

Этот предел обозначается $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, т.е

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{x\to+\infty}\int_{-A}^{+A} f(x)dx. \qquad (13.7)$$

Если существует несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения, и оба интеграла равны. Из существования интеграла в смысле главного значения не следует существование соответствующего несобственного интеграла. В самом деле,

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A} xdx = \lim_{A\to+\infty}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-A}^{+A} = 0;$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$, очевидно, не существует.

Примеры решения задач

<u>*Пример 13.1*</u>. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

<u>*Решение.*</u>

По формуле (13.4) имеем

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty} \left. arctgx\right|_0^B = \lim_{B\to+\infty} arctgB = \frac{\pi}{2}.$$

<u>*Пример 13.2.*</u> $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$.

<u>*Решение.*</u> $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$ расходится, так как $\int_0^{\infty} e^x dx$ – расходится:

$$\lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^x dx = \lim_{B\to+\infty}\left. e^x\right|_0^B = \lim_{B\to+\infty}\left(e^x - 1\right) = \infty.$$

<u>*Пример 13.3.*</u> $\int_{-\infty}^{1} e^{2x}dx$.

<u>*Решение.*</u>

С помощью формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x}dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^1 e^{2x}dx = \lim_{A\to-\infty}\left.\frac{1}{2}e^{2x}\right|_A^1 = \frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}\left(e^x - e^{2A}\right) = \frac{1}{2}e^2.$$

<u>*Пример 13.4.*</u> Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}dx$.

<u>*Решение.*</u> Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1} = \frac{\pi}{2} \text{ (см. пример 13.1).}$$

Находим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{x}{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x\left(x^2+1\right)}=1.$$

Итак, $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}dx$ сходится на основании предельного признака сравнения (см. 13.4).

<u>*Пример 13.5.*</u> Исследовать на сходимость $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $(a>0)$.

<u>*Решение.*</u>

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B}\frac{dx}{x^p}=\lim_{B\to+\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]\Bigg|_a^B=\frac{1}{-p+1}\lim_{B\to+\infty}\left(B^{-p+1}-a^{-p+1}\right).$$

При $p>1$, $\frac{1}{-p+1}\lim\limits_{B\to+\infty}\left(B^{-p+1}-a^{-p+1}\right)=-\frac{1}{-p+1}a^{-p+1}$ и интеграл сходится.

При $p\le 1$, $\frac{1}{-p+1}\lim\limits_{B\to+\infty}\left(B^{-p+1}-a^{-p+1}\right)=\infty$ и интеграл расходится.

<u>*Пример 13.5.*</u> Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx$ (интеграл Френеля).

<u>*Решение.*</u> Введем новую переменную $x=\sqrt{t}$, тогда $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$.

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}\right).$$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}$ – сходится (убедиться самостоятельно). Интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}$ вычисляем с помощью формулы (13.6) интегрирования по частям, полагая $u=\frac{1}{\sqrt{t}}$, $dv=\sin tdt$.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{b}-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{b}\frac{\cos tdt}{t\sqrt{t}}\right)=-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos tdt}{t\sqrt{t}}.$$

Этот интеграл сходится, так как $\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right|\le\frac{1}{t^{3/2}}$, а $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ сходится. Поэтому $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin tdt}{\sqrt{t}}$ сходится, следовательно, сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx$.

Пример 13.7. Найти площадь поверхности, образованной вращение графика функции $y = e^{-x}$, $0 \le x < +\infty$ вокруг оси Ox.

Решение.

$$S_x = 2\pi \int_0^{+\infty} y(x)\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{обозначаем } e^{-x} = t, \\ \text{тогда } dt = -e^{-x}dx, \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, \\ x = +\infty \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\} = -2\pi\int_1^0 \sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\pi\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Занятие четырнадцатое

Тема: «НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ (2-го РОДА)»

Основные теоретические сведения

14.1. Определение несобственного интеграла от неограниченной функции

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,\eta], \eta < b$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$.

Несобственный интеграл от неограниченной функции определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{x\to b-0}\int_a^{\eta} f(x)dx. \qquad (14.1)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, а функция $f(x)$ – интегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a,b)$; если же предел не существует (в частности, когда он бесконечен), – расходящимся, функция $f(x)$ – неинтегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a,b)$. Геометрически для непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a,b)$ сходящийся несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади неограниченной криволинейной трапеции (S) (рис.14.1): $(S) = \{(x,y): a < x < b,\ 0 < y < f(x)\}$.

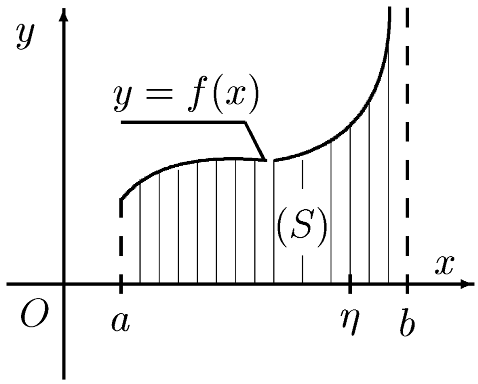

Рис. 14.1

Аналогично определяется несобственный интеграл функции $f(x)$ на промежутке $(a,b]$, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\xi\to a+0}\int_\xi^b f(x)dx. \qquad (14.2)$$

В случае, когда $c\in(a,b)$ и $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$,

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\eta\to c-0}\int_a^\eta f(x)dx+\lim_{\xi\to c+0}\int_\xi^b f(x)dx. \qquad (14.3)$$

Свойства несобственных интегралов от неограниченных функций, в основном, аналогичны свойствам определенного интеграла (см. 7.2), за исключением свойств 9 и 11, которые для несобственных интегралов теряют смысл. Ниже теоретические сведения приводятся для интеграла вида (14.1).

14.2. Основные приемы вычисления несобственных интегралов от неограниченных функций:

1. С помощью формулы Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$, $x\in[a,b)$, непрерывна и $F(x)$, $x\in[a,b)$, – какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0)-F(a), \qquad (14.4)$$

где $F(b-o)=\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$.

2. С помощью формулы замены переменной

Если $f(x)$, $x\in[a,b)$ непрерывная, а $\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta)$, – непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)<\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b,$$

то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (14.5)$$

Формула (14.5) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в нее интегралов.

3. С помощью формулы интегрирования по частям

Если $u(x),\ x\in[a,b)$ и $v(x),\ x\in[a,b)$ – непрерывно дифференцируемые функции и $\lim\limits_{x\to b-0}(u\cdot v)$ существует, то

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du\,, \tag{14.6}$$

где

$$u\cdot v\Big|_a^b = \lim_{x\to b-0}(u\cdot v) - u(a)\cdot v(a).$$

Формула (14.6) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в нее интегралов.

14.3. Критерий сходимости Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a,b)$, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[a,\eta],\ \eta<b$ и неограничена в левой окрестности точки $x=b$. Тогда для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists\eta\in[a,b)$ такое, что при $\forall\eta_1,\eta_2\in(\eta,b)$ $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

14.4. Признаки сходимости и расходимости интегралов для неотрицательных функций (признаки сравнения)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на промежутке $[a,b)$ и интегрируемы на каждом отрезке $[a,\eta],\ \eta<b$. Тогда

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на промежутке $[a,b)$ неравенству $f(x)\le g(x)$, то
   - Из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$.
   - Из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.
2. Если $g(x)>0$ на промежутке $[a,b)$ и существует

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=k,\ k\ne 0,$$

то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

14.5. Абсолютно сходящиеся и неабсолютно (условно) сходящиеся интегралы

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Справедлива

Теорема. Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

При исследовании абсолютной сходимости несобственных интегралов $\int\limits_a^b f(x)dx$ обычно применяют признаки сравнения (14.4).

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется неабсолютно (условно) сходящимся, если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ расходится.

14.6. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ от неограниченной функции в смысле главного значения.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $(a,c-\varepsilon]$ и $(c+\varepsilon,b]$, $\forall\varepsilon>0$, и неограничена в окрестности точки $c\in(a,b)$. Интегралом в смысле главного значения называется

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right).$$

Этот предел обозначается $v.p.\int\limits_a^b f(x)dx$**, т.е.**

$$v.p.\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right). \qquad (14.7)$$

Если существует несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения и эти интегралы равны. Из существования интеграла в смысле главного значения не следует существования соответствующего несобственного интеграла. Действительно,

$$v.p.\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\varepsilon}^1\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=0;$$

$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ не существует.

Примеры решения задач

Пример 14.1. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Решение.

По формуле (14.3) имеем

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} \right) \Bigg|_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = \infty .$$

Следовательно, исследуемый интеграл расходится.

Пример 14.2. $\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Решение.

Подынтегральная функция неограничена в точке $x=1$. С помощью формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int\limits_{1+\varepsilon}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\left(3\sqrt[3]{(x-1)} \right) \Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \left(3\sqrt[3]{(x-1)} \right) \Bigg|_{1+\varepsilon}^9 \right] =$$

$$= 3\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{\varepsilon} \right) = 9 .$$

Пример 14.3. Исследовать на сходимость $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

Решение. В точке $x=0$ функция $\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$ обращается в бесконечность. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ и $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ расходятся, так как $p=\frac{4}{3}>1$. Следовательно, интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ расходится.

Если бы к этому интегралу формально применили формулу Ньютона-Лейбница, то получили бы неверный результат:

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) \Bigg|_{-1}^1 = -6 .$$

Пример 14.4. Доказать, что $\int\limits_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx$ сходится.

Решение. Для $0 < x \le 1$ имеем

$$0 \le \left| \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} ,$$

но $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ – сходится, поэтому по признаку сравнения сходится к $\int\limits_0^1 \left| \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} \right| dx$, а следовательно, сходится, и притом абсолютно, заданный интеграл.

Пример 14.5. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$.

Решение.

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{1+x+x^2}\right).$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1-x}+\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx.$$

$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x}=-\lim_{\varepsilon\to+0}\ln|1-x|\Big|_0^{1-\varepsilon}=\infty$ расходится

$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx$ – собственный интеграл.

Следовательно, исходный интеграл расходится.

Занятие пятнадцатое

Тема: «ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА). ОРИГИНАЛ. ИЗОБРАЖЕНИЕ ОРИГИНАЛА. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ.»

Основные теоретические сведения

15.1. Определения понятий: оригинал, изображение.

Оригиналом называется всякая функция $f(t)$, $t\in R$, вообще говоря, комплекснозначная $f(t)=u(t)+iv(t)$, удовлетворяющая условиям:

1. $f(t)=0$ при $t<0$, причем $f(0)=f(+0)$.
2. На любом конечном отрезке $[0,T]$ функция $f(t)$ может иметь лишь определенное число точек разрыва 1-го рода.
3. Существуют такие постоянные M и s, что $|f(t)|<Me^{st}$ при $t>0$. Число $s_0=\inf s$ называют показателем роста функции $f(t)$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$, $p=s+i\sigma$, $\operatorname{Re} p>s_0$, определяемая равенством

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt. \qquad (15.1)$$

Стоящий в правой части равенства (15.1) интеграл Лапласа сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} p>\sigma_0$ комплексного переменного р (теорема о существовании изображения).

Соответствие (15.1) между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ символически записывается в виде $F(p)\doteqdot f(t)$.

Если оригиналы $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то они одинаковы во всех точках непрерывности этих оригиналов (теорема единственности оригинала).

Иллюстрирующий пример. Найти изображение функции Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases}1, \ t \geq 0, \\ 0, \ t<0.\end{cases} \qquad (15.2)$$

Решение. Функция Хевисайда является оригиналом с показателем роста $s_0=0$, поэтому

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\eta(t)=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}. \qquad (15.3)$$

15.2. Основные свойства преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа обладает рядом замечательных свойств. Так справедливы:

1. *Теорема о сложении.* Если $f_i(t) \leq F_i(p)$, $\operatorname{Re} p>s_{i0}$, $i=\overline{1.n}$, то $\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \leq \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p)$, C_i- произвольная комплексная постоянная, $\operatorname{Re} p=s>\max\{s_{10},\ldots,s_{n0}\}$.
2. *Теорема о подобии.* Если $f(t) \leq F(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0$, то $f(\alpha t) \leq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, $\alpha>o, \operatorname{Re} p>\max\{s_0,\alpha s_0\}$.
3. *Теорема о запаздывании.* Если $f(t) \leq F(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0$,, то $f(t-\tau) \leq e^{-p\tau}F(p)$, $\tau>0$, $\operatorname{Re} p>s_0$.
4. *Теорема об умножении оригинала на показательную функцию $e^{-\alpha t}$.* Если $f(t) \leq F(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0$, то $e^{-\alpha t}\cdot f(t) \leq F(p+\alpha)$, $\alpha-$ произвольное комплексное число, $\operatorname{Re}(p+\alpha)>s_0$.
5. *Теорема об умножении оригинала на «минус аргумент».*

Если $f(t) \leq F(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0$, то $(-t)\cdot f(t) \leq F'(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0$.

Если $f(t) \leq F(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0$, то $(-t)^n\cdot f(t) \leq F^{(n)}(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0$.

6. *Теорема о делении оригинала на аргумент.* Если $f(t) \leq F(p)$, $\operatorname{Re} p>s_0$, то $\frac{f(t)}{t} \leq \int_p^{\infty} F(q)dq$, $\operatorname{Re} p>s_0$.
7. *Теорема о дифференцировании оригинала.* Если

$$f(t) \leq F(p),\ \operatorname{Re} p>s_0, \text{то}$$

$$f'(t) \leq p\cdot F(p)-f(0),$$

$$f''(t) \leq p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f'(0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(t) \leq p^n\cdot F(p)-p^{n-1}\cdot f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots f^{(n-1)}(0).$$

8. *Теорема об интегрировании оригинала.* Если $f(t) \leq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то $\int_0^t f(t)dt \leq \frac{F(p)}{p}$, $\operatorname{Re} p > s_0$.

9. *Теорема о дифференцировании и интегрировании оригинала по параметру.* Если $f(t,\alpha) \leq F(t,\alpha)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то $f'_\alpha(t,\alpha) \leq F'_\alpha(p,\alpha)$, $\operatorname{Re} p > s_0$; $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)d\alpha \leq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p,\alpha)d\alpha$.

10. *Теорема о связи предельных «начальных» и «конечных» значений оригинала и изображения.* Если $f(t) \leq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$f(0) = \lim_{p\to\infty} pF(p), \quad f(+\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p),$$

если $f(+\infty)$ существует.

11. *Теорема об изображении свертки двух оригиналов (теорема Бореля).* Если $f_1(t) \leq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_{10}$, $f_2(t) \leq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_{20}$, то

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)d\tau \leq F_1(p)\cdot F_2(p).$$

12. Теорема об изображении производной свертки (теорема Дюамеля).
Если $f_1(t) \leq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_{10}$, $f_2(t) \leq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_{20}$, то

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau \leq pF_1(p)F_2(p),$$

здесь $f_1(t)$ – непрерывна на $[0,+\infty)$, $f_2(t)$ – непрерывно дифференцируема на $[0,+\infty)$ функции.

С помощью этих свойств (зная изображение функции Хевисайда $\eta(t) \leq \frac{1}{p}$ (15.2, 15.3)) может быть построена таблица изображений основных функций (оригиналов)

№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$
2	$t^n, n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0$
4	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, $\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0$
5	$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, $\operatorname{Re} p > \lvert Jm\alpha \rvert$

6	$\cos(\alpha t)$	$\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$, $\operatorname{Re} p > \lvert Jm\alpha \rvert$
7	$sh(\alpha t)$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$
8	$ch(\alpha t)$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$
9	$e^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$, $\operatorname{Re} p > \left(\operatorname{Re}\alpha + \lvert Jm\beta \rvert\right)$
10	$e^{\alpha t}\cos(\beta t)$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$, $\operatorname{Re} p > \left(\operatorname{Re}\alpha + \lvert Jm\beta \rvert\right)$

15.3. Восстановление оригинала по изображению.

1-й способ – с помощью свойств 1-12 и таблицы оригиналов и изображений. При этом широко используются тождественные преобразования, в частности метод разложения рациональной дроби в сумму простейших.

2-й способ – с помощью формулы обращения Римана-Меллина. Если $f(t)$– оригинал и $F(p)$– его изображение, то в любой точке непрерывности $f(t)$ справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \qquad (15.4)$$

где интегрирование производится по любой прямой $\operatorname{Re} p = s,\ s > s_0$. Во всякой точке t_k, являющейся точкой разрыва функции $f(t)$, правая часть формулы (15.4) равна $\frac{1}{2}\left[f(t_k-0)+f(t_k+0)\right]$.

Следствие из формулы (15.4) (теорема разложения): Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и ее разложение в ряд по степеням $\frac{1}{p}$ имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{t^n}{n!},\quad t \ge 0\left(f(t)=0 \text{ при } t<0\right) \qquad (15.15)$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Всюду в дальнейшем под заданной с помощью формулы функцией $f(t)$ будем понимать произведение этой функции на функцию Хевисайда $\eta(t)$ (15.2), т.е. считать $f(t)=0$ при $t<0$.

Примеры решения задач

Пример 15.1. Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{1}{t-1}$.

Решение.

Данная функция $f(t)$ оригиналом не является, так как в точке $t=1$ интеграл Лапласа (15.1) расходится. Следовательно, изображения не существует.

Пример 15.2. Найти изображение функции $ch2t$.

Решение.

Используя свойство линейности и формулу 3 таблицы оригиналов и изображений, получаем:

$$ch2t=\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p+2}\right)=\frac{p}{p^2-4}.$$

Пример 15.3. Найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases}\cos t \text{ при } 0\le t<\pi,\\ 0 \text{ при } t\ge\pi.\end{cases}$$

Решение.

Используя функцию Хевисайда (15.2) и учитывая, что $\eta(t-\pi)=1$ при $t\ge\pi$, функцию $f(t)$ представим в виде $f(t)=\cos t+4(t-\pi)\cos(t-\pi)$. Пользуясь формулой 6 таблицы оригиналов и изображений и теоремой о запаздывании, получаем:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{pe^{-\pi p}}{p^2+1}=\frac{p\left(1+e^{-\pi p}\right)}{p^1+1}.$$

Пример 15.5. Найти изображение функции

$$f(t)=\int_0^t \sin(t-\tau)e^{-3\tau}d\tau.$$

Решение.

Используя теорему Бореля, получаем

$$\int_0^t \sin(t-\tau)e^{-3\tau}d\tau=\sin t * e^{-3t}\le\frac{1}{\left(p^2+1\right)(p+3)}.$$

Пример 15.6. Найти изображение функции $f(t)$ с периодом *T*.

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{T}t, & 0\le t<\dfrac{T}{2};\\ \dfrac{2}{\mathrm{T}}(T-t), & \dfrac{T}{2}\le \mathrm{t<T}.\end{cases}$$

Решение.

Если оригинал $f(t)$ имеет период *T*, то его изображение

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{2}{T\left(1-e^{-Tp}\right)}\left(\int_0^{t/2} te^{-pt}dt+\int_{T/2}^{T}\left(T-t\right)e^{-pt}dt\right)=\frac{2\left(1-e^{-\frac{Tp}{2}}\right)}{Tp^2\left(+e^{-\frac{Tp}{2}}\right)}.$$

<u>*Пример 15.7.*</u> Найти изображение $F\left(p\right)$ функции.

$$\sigma\left(t,h\right)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \frac{1}{h}, & 0\le t<h,\\ 0, & t\ge h.\end{cases}$$

<u>*Решение.*</u>

Функцию $\sigma\left(t,h\right)$ представляем через функцию Хевисайда

$$\sigma\left(t,h\right)=\frac{1}{h}\left[\eta\left(t\right)-\eta\left(t-h\right)\right].$$

На основании теорем о сложении и запаздывании получаем искомое изображение $F\left(p\right)$

$$\sigma\left(t,h\right)=F\left(p\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-ph}\right)=\frac{1}{p}\frac{1-e^{-ph}}{h}.$$

<u>*Пример 15.8.*</u> Найти оригинал $f\left(t\right)$ для изображения

$$F\left(p\right)=\frac{5}{p^2+4p+20}.$$

<u>*Решение.*</u>

Выделяем полный квадрат в знаменателе заданного изображения $F\left(p\right)$ и, используя формулу 9 таблицы оригиналов и изображений, получаем искомый оригинал

$$F\left(p\right)=\frac{5}{p^2+4p+20}=\frac{5}{4}\frac{4}{\left(p+2\right)^2+4^2}\le f\left(t\right)=\frac{5}{4}e^{-2t}\sin 4t.$$

<u>*Пример 15.9.*</u> Найти оригинал $f\left(t\right)$ для изображения

$$F\left(p\right)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

<u>*Решение.*</u>

Подставляем заданное изображение $F\left(p\right)$ в виде

$$F\left(p\right)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}=\frac{\left(p+1\right)+2}{\left(p+1\right)^2+9}=\frac{p+1}{\left(p+1\right)^2+9}+\frac{2}{3}\frac{3}{\left(p+1\right)^2+9}.$$

На основании формул 9, 10 таблицы оригиналов и изображений получаем

$$f\left(t\right)=e^{-t}\cos 3t+\frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t.$$

<u>*Пример 15.10.*</u> Найти оригинал $f\left(t\right)$ для изображения

$$F\left(p\right)=\frac{pe^{-3p}}{p^3-1}.$$

Решение.

Найдем сначала оригинал $f_1(t)$ для дроби $\dfrac{p}{p^3-1}$, разложив ее на сумму элементарных дробей:

$$F_1(p)=\frac{p}{p^3-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-p}-\frac{1}{3}\frac{p-1}{p^2+p+1}=$$

$$=\frac{p}{p^3-1}-\frac{1}{3}\frac{p+1/2}{(p+1/2)^2+3/4}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(p+1/2)^2+3/4}.$$

Пользуясь таблицей оригиналов и изображений, имеем

$$f_1(t)=\frac{1}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Применяя теперь теорему о запаздывании, получаем искомый оригинал $f(t)$

$$\frac{pe^{-3p}}{p^3-1}\leq f(t)=\frac{1}{3}\eta(t-3)\left(e^{t-3}-e^{-\frac{1}{2}(t-3)}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t-3}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right).$$

<u>*Пример 15.11.*</u> Найти оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(p)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

Решение.

Первый способ: используем теорему Бореля

$$F(p)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\leq f(t)=\sin t*\cos t=\int_0^t\sin(t-\tau)\cos\tau d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\sin t+\sin(t-2\tau)\right)d\tau=\frac{1}{2}\tau\sin t\Big|_0^t+\frac{1}{4}\cos(t-2\tau)\Big|_0^t=\frac{1}{2}t\sin t.$$

Второй способ: используя сначала формулу 5 таблицы оригиналов и изображений

$$\frac{p}{p^2+1}\leq\sin t,$$

а затем теорему об умножении оригинала на «минус аргумент»

$$\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\leq -t\sin t\Rightarrow -\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}\leq -t\sin t,$$

находим

$$F(p)=\frac{p}{\left(1+p^2\right)^2}\leq f(t)=\frac{1}{2}t\sin t.$$

<u>Занятие шестнадцатое</u>

Тема: «ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»

Основные теоретические сведения

16.1. Решение линейных дифференциальных уравнений.

Для того, чтобы найти решение $y(t)$ линейного дифференциального уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t), \qquad (16.1)$$

($a_0, a_1, \ldots, a_n$ – постоянные коэффициенты), $f(t)$ – оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (16.2)$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т.е. от уравнения (16.1) с условиями (16.2) перейти, используя свойство 7 преобразования Лапласа (см. 15.1), к операторному уравнению

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) Y(p) + Q_{n-1}(p), \qquad (16.3)$$

где $Y(p)$ – изображение искомого решения $y(t)$, $F(p)$ – изображение функции $f(t)$,

$$Q_{n-1}(p) = a_0\left(p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y_0' + \ldots + p y_0^{(n-2)} + y_0^{(n-1)}\right) + a_1\left(p^{n-2} y_0 + p^{n-3} y_0' + \ldots + \right.$$

$$\left. + p y_0^{n-3} + y_0^{(n-2)}\right) + \ldots + a_{n-2}\left(p y_0 + y_0'\right) + a_{n-1} \cdot y_0.$$

Если $y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} \equiv 0$, то $Q_{n-1}(p) \equiv 0$.

Операторное уравнение (16.3) является линейным алгебраическим уравнением. Решив его относительно $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{F(p) + Q_{n-1}(p)}{L(p)},$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ – характеристический многочлен (полином) данного уравнения (16.1)) и найдя (восстановив каким-либо способом (см. 15.3)) оригинал для $Y(p)$, мы получим искомое решение $y(t)$. Если считать $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением данного уравнения (16.1).

16.2. Решение нормальных систем линейных дифференциальных уравнений.

Для того, чтобы найти решение $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ нормальной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n + f_1(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (16.4)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n + f_n(t)$$

($a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ – постоянные коэффициенты, $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ – оригиналы), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(0) = y_{10},\ y_2(0) = y_{20},\ \ldots, y_n(0) = y_{n0}, \qquad (16.5)$$

следует применить к обеим частям каждого уравнения этой системы преобразование Лапаласа, т.е. от системы (16.4) с условиями (16.5) перейти, используя свойство 7 преобразования Лапласа (см. 15.1), к операторной системе

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-p)Y_1(p)+a_{12}Y_2(p)+\ldots+a_{1n}Y_n(p)=-F_1(p)-y_{10},\\
&a_{21}Y_1(p)+(a_{22}-p)Y_2(p)+\ldots+a_{2n}Y_n(p)=-F_2(p)-y_{20},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}Y_1(p)+a_{n2}Y_2(p)+\ldots+(a_{nn}-p)Y_n(p)=-F_n(p)-y_{n0},
\end{aligned} \qquad (16.6)$$

где $Y_1(p),Y_2(p),\ldots,Y_n(p)$ – изображение решения соответственно $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$, а $F_1(p),F_2(p),\ldots,F_n(p)$ – изображения функций $f_1(t)$, $f_2(t),\ldots,f_n(t)$.

Операторная система (16.6) является линейной алгебраической системой. Решив ее относительно $Y_1(p),Y_2(p),\ldots,Y_n(p)$ и восстановив (каким-либо способом (см. 15.3)) оригиналы для $Y_1(p),Y_2(p),\ldots,Y_n(p)$, мы получим искомое решение $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$.

Если считать $y_{10},y_{20},\ldots,y_{n0}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением данной системы (16.4).

16.3. Вычисление несобственных интегралов.

1. Из свойств 8 и 12 преобразования Лапласа (см. 15.2) следует: если $f(t)\leq F(p)$, то

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt=F(0) \qquad (16.7)$$

при условии, что $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ сходится.

2. Из свойств 6 и 8 преобразования Лапласа (см. 15.2) следует: если $f(t)\leq F(p)$, то

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}F(p)dp.$$

3. Справедлива теорема Парсеваля:

Если $f_1(t)\leq F_1(p)$, $f_2(t)\leq F_2(p)$ и функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ аналитичны при $\operatorname{Re} p\geq 0$, то

$$\int_0^{+\infty} f_1(u)F_2(u)du=\int_0^{+\infty}F_1(v)f_2(v)dv,$$

при этом из сходимости одного из этих интегралов следует сходимость другого.

Отметим, что операционное исчисление применяется также для решения линейных интегральных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных.

Примеры решения задач

Пример 16.1

Решить дифференциальное уравнение $y''+8y'+16y=-10e^{-4t}$, начальные условия: $y(0)=2,\ y'(0)=-5$.

Решение. Пусть $y(t)\leq Y(p)$, тогда

$$y'(t)\leq p\cdot Y(p)-2;\qquad y''(t)\leq p^2Y(p)-2p+5.$$

Используя таблицу оригиналов и изображений, находим изображение $-10e^{4t}\leq\dfrac{-10}{p+4}$. Запишем операторное уравнение относительно изображения $Y(p)$ и решим его. Имеем

$$\left(p^2+8p+16\right)Y(p)-2p-11=-\frac{10}{p+4};$$

$$Y(p)=-\frac{10}{(p+4)^3}+\frac{2p}{(p+4)^2}+\frac{11}{(p+4)^2}=$$

$$=-\frac{10}{(p+4)^3}+\frac{2(p+4-4)}{(p+4)^2}+\frac{11}{(p+4)^2}=$$

$$=-\frac{10}{(p+4)^3}+\frac{2}{p+4}+\frac{3}{(p+4)^2}.$$

Переходя от изображения $Y(p)$ к оригиналу $y(t)$, получаем искомое частное решение:

$y(t)=-5t^2e^{-4t}+2e^{-4t}+3te^{-4t}=e^{-4t}\left(2+3t-5t^2\right).$

Пример 16.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x+y+2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=3x,\end{cases}$$

начальные условия: $x(0)=1,\ y(0)=0$.

Решение.

Пусть $x(t)\leq X(p),\ y(t)\leq Y(p)$, тогда $x'(t)\leq pX(p)-1,\ y'(t)\leq pY(p)$. Получим операторную систему:

$$\begin{cases}(p+2)X(p)-Y(p)=\dfrac{p+2}{p},\\[2mm] -3X(p)+pY(p)=0.\end{cases}$$

Решаем эту систему

$$X(p)=\frac{p+2}{(p+3)(p-1)},\quad Y(p)=\frac{3(p+2)}{p(p+3)(p-1)}.$$

Разложим $X\,\dfrac{p+2}{(p+3)(p-1)}$ на элементарные дроби:

$$X(p)=\frac{p+2}{(p+3)(p-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+3}+\frac{3}{4(p-1)}.$$

Используя формулы таблицы оригиналов и изображений и применяя теорему о сложении, получаем

$$X(p)\leq x(t)=\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{3}{4}e^{t}.$$

Заметим, что $X(p)$ и $Y(p)$ отличаются на множитель $\frac{3}{p}$. Используя теоремы о сложении и об интегрировании оригинала, получаем

$$y(t)=3\int_0^t\left(\frac{1}{4}e^{-3\tau}+\frac{3}{4}e^{\tau}\right)d\tau=\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{9}{4}e^{t}-2.$$

Таким образом, искомое решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{4}e^{-3t}+\dfrac{3}{4}e^{t}, \\ y(t)=-\dfrac{1}{4}e^{-3t}+\dfrac{9}{4}e^{t}-2. \end{cases}$$

<u>*Пример 16.3.*</u> Вычислить $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.

<u>*Решение.*</u>

Используя сначала формулу 5 таблицы оригиналов и изображений, затем применяя теорему о делении оригинала на аргумент, находим

$$\sin t \qquad \leq\frac{1}{p^2+1},\quad \frac{\sin t}{t}dt\leq\int_p^{+\infty}\frac{dq}{q^2+1}=arctq\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-arctgp.$$

Далее, используя последовательно теорему об интегрировании оригинала

$$\int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\leq\frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-arctgp\right)$$

и теорему о связи предельных «начальных» и «конечных» значений оригинала и изображения

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\leq\lim_{p\to 0}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-arcrgp\right)\right],$$

получаем

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

СОДЕРЖАНИЕ